Injectivité de la transformée de Fourier (234, 235, 236, 239, 244, 250)

El Amrani, Analyse de Fourier p. 115-116 et 156-157

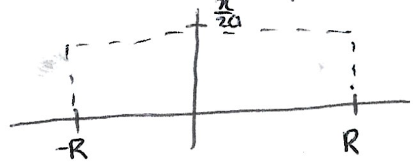
lem : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\forall x \in \mathbb{R}$ $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$. Alors $\hat{\gamma}_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{x^2}{4a}}$

démo : On a $\gamma_a \in L^1$ donc $\hat{\gamma}_a$ est bien définie. On a $\hat{\gamma}_a(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} e^{-ixt}\, dt$.

On remarque que $at^2 + ixt = a\left(t + \frac{ix}{2a}\right)^2 + \frac{x^2}{4a}$.

Alors $\hat{\gamma}_a(x) = e^{-\frac{x^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(t+\frac{ix}{2a})^2}\, dt$. On pose $\varphi : z \longmapsto e^{-az^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Soit $R>0$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $\Gamma(R)$ le lacet suivant :



Ainsi, on a :

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2}\, dz = \int_{-R}^{R} e^{-at^2}\, dt + \int_0^{\frac{x}{2a}} i e^{-a(R+it)^2}\, dt - \int_{-R}^{R} e^{-a(t+\frac{ix}{2a})^2}\, dt - \int_0^{\frac{x}{2a}} i e^{-a(-R+it)^2}\, dt$$

$$= I_1(R) + I_2(R) - I_3(R) - I_4(R).$$

- On a $\lim_{R\to+\infty} I_1(R) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $|I_2(R)| \leq \int_0^{\frac{x}{2a}} |e^{-a(R+it)^2}|\, dt = \int_0^{\frac{x}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)}\, dt = e^{-aR^2} \int_0^{\frac{x}{2a}} e^{at^2}\, dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

  Donc $\lim_{R\to+\infty} I_2(R) = 0$. On a de même pour $I_4(R)$.
- $I_3(R)$: Comme $e^{-a(t+\frac{ix}{2a})^2} \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\int_{\mathbb{R}} e^{-a(t+\frac{ix}{2a})^2}\, dt$ converge donc

  $\lim_{R\to+\infty} I_3(R) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(t+\frac{ix}{2a})^2}\, dt$

Comme φ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\Gamma(R)$ est un lacet, on peut appliquer le thm de Cauchy et on a

$$0 = \int_{\Gamma(R)} \varphi(z)\, dz = I_1(R) - I_4(R) \quad \text{ie} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-a(t+\frac{ix}{2a})^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

thm : L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est injective
$f \longmapsto \hat{f}$

démo : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{f} = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\gamma_n(x) := \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2n^2}} \in L^1(\mathbb{R})$.

Ainsi par le lemme $\left(a = \frac{1}{2n^2}\right)$ on obtient $\hat{\gamma}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi n^2}\, e^{-\frac{x^2 n^2}{2}} = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 n^2}{2}}$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = \gamma_n(x) e^{iax} \in L^1(\mathbb{R})$

La formule de dualité nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}_n(u)\,du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v) g_n(v)\,dv = 0 \text{ car } \hat{f} = 0 \text{ par hypothèse.}$$

$$\text{Or } \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}_n(u)\,du = \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{\gamma}_n(u-a)\,du \overset{\hat{\gamma}_n \text{ est paire}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{\gamma}_n(a-u)\,du = f * \hat{\gamma}_n(a).$$

Or $(\hat{\gamma}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f * \hat{\gamma}_n - f\|_{L^1} = 0$ Mais on a $f * \hat{\gamma}_n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f * \hat{\gamma}_n - f\|_{L^1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$

D'où $\|f\|_{L^1} = 0$ ie $f = 0$.

Comme l'application $\mathcal{F}$ est linéaire, on conclut que $\mathcal{F}$ est injective

Questions : Injectivité de la transformée de Fourier.

- $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$?

* On pose $f(t,R) = \mathbb{1}_{[-R,R]}(t) e^{-at^2}$.

- $R>0$, $t \longmapsto f(t,R)$ est mesurable
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{R\to+\infty} f(t,R) = e^{-at^2}$
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t,R)| \leq e^{-at^2} \in L^1(\mathbb{R})$.

Donc par le thm de convergence dominée, on a $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-at^2} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt$.

* On pose $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt$

On a $I^2 = 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-ay^2} dy\right) \overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} 4\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-a(x^2+y^2)} dx\,dy$.

$$\varphi : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}^{+2} \setminus \mathbb{R}^+ \times \{0\} \text{ est un } \mathcal{C}_1\text{-difféomorphisme}$$
$$(\theta, r) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$I^2 = 4\left(\int_{\mathbb{R}^+}\int_0^{2\pi} e^{-ar^2} r\,dr\,d\theta\right) \overset{\text{Fubini}}{=} 4\left(\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)\left(\int_0^{+\infty} re^{-ar^2} dr\right)\right) = 4\frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-ar^2}}{2a}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{a}$$

Donc $I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

D'où $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

- Formule de dualité ?

On a $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(u)g(v)e^{-iuv}| dv\,du \underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| du \int_{\mathbb{R}} |g(v)| dv = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$.

Par le thm de Fubini, on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\left(\int_{\mathbb{R}} g(v)\, e^{-iuv} dv\right) du = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-iuv} du\right) g(v) dv = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v) g(v) dv.$$

• $\hat{g}_n(x) = \hat{\gamma}_n(x-a)$?

On a $g_n(x) = \gamma_n(x) e^{-iax}$ donc $\int_{\mathbb{R}} g_n(t) e^{-itx} dt = \int_{\mathbb{R}} \gamma_n(t) e^{it(a-x)} dt$

$$= \int_{\mathbb{R}} \gamma_n(t) e^{-it(x-a)} dt = \hat{\gamma}_n(x-a).$$

• $(\hat{\gamma}_n)_n$ approximation de l'unité ?

Si $f \in L^1$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$ avec f positive alors $\varphi_n(t) = nf(nt)$ est une au.

En effet : • $\varphi_n \geq 0$

• $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}} n f(nt)\, dt \overset{T=nt}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{n} f(T)dT = 1$ par hypothèse

• Soit $\varepsilon > 0$, on a $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)dt = 1$.

Or $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)dt = \int_{|t|>\varepsilon} \varphi_n(t)dt + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} nf(nt)\, dt}$

$\hookrightarrow$ chgt de var $T = nt$: $\int_{-\varepsilon n}^{\varepsilon n} f(T)dT \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1.$

par TCD sur $\mathbb{1}_{[-\varepsilon n, \varepsilon n]} f(t)dt$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{|t|>\varepsilon} \varphi_n(t)\, dt = 0.$

D'où φ_n est une approximation de l'unité.

En posant $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ on a $\hat{\gamma}_n(t) = nf(nt)$ avec $f \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f = 1$.

Donc $\hat{\gamma}_n$ est une approximation de l'unité.

$\gamma_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{\frac{x^2}{2n}} = nf(nt)$